PART3　条件付き確率

例題

(1)　10本のくじのうち，4本が当たりくじである。このくじをA，Bが順に1本ずつ引くとき，次の問いに答えよ。ただし，一度引いたくじはもとには戻さない。

(i)　Aが当たりくじを引いたとき，Bが当たる確率

(ii)　A，Bともに当たる確率

(iii)　Bが当たる確率

(2)　赤玉3個と白玉2個が入った袋Aと，赤玉2個と白玉2個が入った袋Bがある。袋Aから玉を1個取り出し，それを袋Bに入れた後に，袋Bから玉を1個取り出すとき，それが白玉である確率を求めよ。

Point Pickup

練習

(1) 1 から 20 までの数字が書かれた 20 枚のカードから，もとに戻さずに 1 枚ずつ 2 枚引くとき，2 枚目が 3 の倍数である確率を求めよ。

(2) 赤玉 6 個と白玉 3 個が入った袋 A と，赤玉 3 個と白玉 4 個が入った袋 B がある。袋 A から玉を 1 個取り出し，それを袋 B に入れた後に，袋 B から 2 個同時に取り出すとき，その 2 個がともに赤玉である確率を求めよ。

第 5 講　PART3　確認問題

1　1から20までの数字が書かれた20枚のカードから，もとに戻さずに1枚ずつ2回引くとき，2枚目が5の倍数である確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

2　赤玉5個と白玉3個が入った袋Aと，赤玉3個と白玉2個が入った袋Bがある。袋Aから玉を1個取り出し，それを袋Bに入れた後に，袋Bから玉を1個取り出すとき，それが白玉である確率は $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカ}}$ である。

PART3　条件付き確率

例題

(1)　10本のくじのうち，4本が当たりくじである。このくじをA，Bが順に1本ずつ引くとき，次の問いに答えよ。ただし，一度引いたくじはもとには戻さない。

(i)　Aが当たりくじを引いたとき，Bが当たる確率

(ii)　A，Bともに当たる確率

(iii)　Bが当たる確率

(2)　赤玉3個と白玉2個が入った袋Aと，赤玉2個と白玉2個が入った袋Bがある。袋Aから玉を1個取り出し，それを袋Bに入れた後に，袋Bから玉を1個取り出すとき，それが白玉である確率を求めよ。

(1)　Aが当たりくじを引く事象を A，Bが当たりくじを引く事象を B とする。

(i)　求める確率は $P_A(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

(ii)　$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，$P_A(B)=\frac{1}{3}$ より，求める確率は

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$$

(iii)　Bが当たるのは

[1]　Aが当たり，Bも当たる　　[2]　Aがはずれ，Bが当たる

のいずれかの場合であり，これらの事象は互いに排反である。

[1] の確率は(ii)より $\frac{2}{15}$

[2] の確率は $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$

よって，求める確率は

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

(2)　袋Bから白玉を取り出すのは

[1]　袋Aから赤玉，袋Bから白玉　　[2]　袋Aから白玉，袋Bから白玉

を取り出す場合であり，[1]，[2] の事象は互いに排反である。

よって，求める確率は $\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$

練習

(1)　1 から 20 までの数字が書かれた 20 枚のカードから，もとに戻さずに 1 枚ずつ 2 枚引くとき，2 枚目が 3 の倍数である確率を求めよ。

(2)　赤玉 6 個と白玉 3 個が入った袋 A と，赤玉 3 個と白玉 4 個が入った袋 B がある。袋 A から玉を 1 個取り出し，それを袋 B に入れた後に，袋 B から 2 個同時に取り出すとき，その 2 個がともに赤玉である確率を求めよ。

(1)　1 枚目が 3 の倍数である事象を A，2 枚目が 3 の倍数である事象を B とする。

2 枚目が 3 の倍数であるのは

[1]　1 枚目が 3 の倍数，2 枚目も 3 の倍数

[2]　1 枚目が 3 の倍数以外の数，2 枚目が 3 の倍数

のいずれかの場合であり，これらの事象は互いに排反である。

[1] の確率は $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=\dfrac{6}{20}\times\dfrac{5}{19}=\dfrac{30}{380}$

[2] の確率は $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{14}{20}\times\dfrac{6}{19}=\dfrac{84}{380}$

よって，求める確率は

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$$
$$=\frac{30}{380}+\frac{84}{380}=\frac{114}{380}=\frac{3}{10}$$

(2)　袋 B から赤玉 2 個を取り出すのは

[1]　袋 A から赤玉，袋 B から赤玉 2 個　　[2]　袋 A から白玉，袋 B から赤玉 2 個

を取り出す場合であり，[1]，[2] の事象は互いに排反である。

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{9}\times\dfrac{{}_4C_2}{{}_8C_2}+\dfrac{3}{9}\times\dfrac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{14}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{28}=\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{28}=\dfrac{5}{28}$

第 5 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：5

[解説]

1枚目が5の倍数である事象を A，2枚目が5の倍数である事象を B とする。

2枚目が5の倍数であるのは

[1]　1枚目が5の倍数，2枚目も5の倍数

[2]　1枚目が5の倍数以外の数，
　　2枚目が5の倍数

のいずれかの場合であり，これらの事象は互いに排反である。

[1] の確率は　$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$ [A] [B]

$$=\frac{4}{20}\times\frac{3}{19}$$

$$=\frac{12}{380}$$

[2] の確率は　$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$ [A] [B]

$$=\frac{16}{20}\times\frac{4}{19}$$

$$=\frac{64}{380}$$

よって，求める確率は

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$$

$$=\frac{12}{380}+\frac{64}{380}$$

$$=\frac{76}{380}=\mathbf{\frac{1}{5}}$$

[A]　条件付き確率
ある事象 A，B について，A が起こったとわかっているときの B が起こる確率を A が起こったときの，B の起こる条件付き確率といい，これを $P_A(B)$ と表す。

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

[B]　事象 A，B がともに起こる確率 $P(A\cap B)$ は確率の乗法定理
$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$

2 [正解] ウエ：19，オカ：48

[解説]

袋Ｂから白玉を取り出すのは

[1]　袋Ａから赤玉，袋Ｂから白玉

[2]　袋Ａから白玉，袋Ｂから白玉

を取り出す場合であり，[1]，[2]の事象は互いに排反である。

よって，求める確率は

$$\frac{5}{8}\times\frac{2}{6}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{6}$$

$$=\mathbf{\frac{19}{48}}$$ [C]

[C]　確率の乗法定理
$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$
ここでは，袋Ａから玉を１個取り出したあとの状態を考え，その状態で袋Ｂから玉を取り出す確率を考える。
試行Ｓで事象 A が起こり，かつ試行Ｔで事象 B が起こる確率 $P(A\cap B)$ は，Ｓ，Ｔが「独立ではない」，つまりＳの結果によってＴの結果が変化する場合は
$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$
である。